Examen mathématique 6 + 2

Calcule les limites suivantes et donnes-en une représentation graphique **(20)**

1°) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2+3x+1}{4x^3-5x-1} = 0^+$

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^2+2x+5}{-2x+1} = +\infty$

3°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^2+2x+5}{-2x^2+1} = \dfrac{3}{2}$

4°) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4} = \dfrac{0}{0}$ après factorisation $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{3}{4}$

5°) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-3x-2}{x^2-1} = \dfrac{2}{0} = ?\infty$ à gauche : $+\infty$ et à droite : $-\infty$

6°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$ = FI (binôme conjugué) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0^+$

Dérive les fonctions suivantes **(10)**

a) $f(x) = x^3 - 4x\,(x^2-1)$ $\qquad f'(x) = 3x^2 - 4(x^2-1) - 4x.2x = -9x^2 + 4$

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-2}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2(x^2-2)-(2x+1).2x}{(x^2-2)^2} = \dfrac{-2x^2-2x-4}{(x^2-2)^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+1}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+1}}$

d) $f(x) = 3\sin\sqrt{x^2-1}$ $\qquad f'(x) = 3\cos\sqrt{x^2-1}.\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$

e) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\cos^2 x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{3\cos 3x.\cos^2 x + 2\sin 3x\cos x\sin x}{\cos^4 x}$

Effectue l'étude complète de la fonction : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ **(20)**

Dom : 1, AV : 3, AO/AH : 3, f'(x) : 2, TS de f' : 2, f''(x) : 2, TS de f'' : 2, TV : 3 : graphe : 2

Dom f = $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

AV : x = –1 : à g : $-\infty$ et à d : $+\infty$ et x = 1 : à g : $-\infty$ et à d : $+\infty$

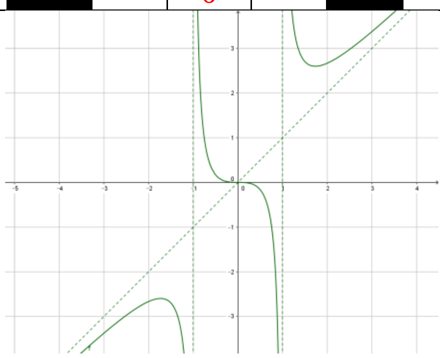
AO : y = x : à $+\infty$: 0^+ et à $-\infty$: 0^-

$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ Avant $-\sqrt{3}$: positif, entre $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$: négatif et après $\sqrt{3}$: positif.

$f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$. Avant –1 : négatif, entre –1 et 0 : positif, entre 0 et 1 : négatif et après 1 : positif

Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		+	0	–		–		–		–	0	+	
f		↗	M $\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$	↘		↘	I 0	↘		↘	m $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	
f''		–		–		+	0	–		+		+	



Détermine le produit A.B avec A = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **(5)**

A.B = $\begin{pmatrix} 25 & 10 & -7 \\ -12 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calcule le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **(5)** det A = 1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

(4 + 12 + 2 + 16) – (15 – 8 – 10 – 2) = 34 – (–5) = 39

Trouve la matrice inverse de A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **(5)** $A^{-1} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Résous le système suivant : $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 1 \end{cases}$ **(6)** S = {(1 ; 0 ; 1)}

Trouve un vecteur de la droite $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ -x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$ (10 ; 7 ; 1)

et un du plan –3x + 4y – 2z = 2 (2 ; 0 ; –3) **(4)**

Ecris une équation vectorielle, des équations paramétriques et cartésiennes pour

a) la droite MN : $\overrightarrow{MX} = k.\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = k \\ y - 2 = -4k \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$

b) le plan MNP : $\overrightarrow{NX} = r\overrightarrow{MN} + s\overrightarrow{MP} = \begin{cases} x = r + 2s \\ y + 2 = -4r \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 1$

avec M = (–1 ; 2 ; 1), N = (0 ; –2 ; 1) et P = (1 ; 2 ; 1). **(8)**

(ATTENTION ERREUR ENONCE POUR P)

Equation de la droite passant par A (–1 ; 2 ; 3) et // au plan –2x + 3y + 4z = 2

Il faut un vecteur directeur qui sera ⊥ au vecteur normal (–2 ; 3 ; 4) : (1 ; 2 ; –1) donc

$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$

Equation de la droite passant par A (–1 ; 2 ; 3) et ⊥ au plan –2x + 3y + 4z = 2 **(4)**

Le vecteur directeur de la droite est le vecteur normal du plan : $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$

Equation du plan passant par A (–1 ; 2 ; 3) et // à la droite $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$

Un des deux plans composant la droite sera parallèle 2x – y + 3z + d = 0
Comme il passe par (–1 ; 2 ; 3), cela donne d = –5 : donc 2x – y + 3z – 5 = 0

Equation du plan passant par A (–1 ; 2 ; 3) et ⊥ à la droite $\begin{cases} x - 1 = 2k \\ y = 3k \\ z + 1 = -k \end{cases}$ **(4)**

Le vecteur directeur de la droite est vecteur normal : 2x + 3y – z + d = 0
Comme il passe par (–1 ; 2 ; 3), cela donne d = –1 : donc 2x + 3y –z – 1 = 0

Une de ces questions :

Détermine la distance du point A (–1 ; 2 ; 3) au plan –x + 2y + z = 4

Il faut trouver la droite ⊥ au plan passant par A : $\begin{cases} x = -k - 1 \\ y = 2k + 2 \\ z = k + 3 \end{cases}$.

Trouver le point de percée de la droite avec le plan : k + 1 + 4k + 4 + k + 3 = 4 donc k = 2/3
Le point est (–5/3 ; 10/3 ; 11/3)

La distance vaut $\sqrt{\left(\frac{-5}{3}+1\right)^2 + \left(\frac{10}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{11}{3}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{16}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Détermine la distance du point A (–1 ; 2 ; 3) à la droite $\begin{cases} x + 2 = -k \\ y + 1 = 2k \\ z - 1 = k \end{cases}$

Il faut trouver le plan ⊥ au plan passant par A :–x + 2y + z –8 = 0 (1 + 4 + 3 + d = 0) avec d = –8.
Trouver le point de percée de la droite avec le plan : k + 2 + 4k – 2 + k + 1 = 8 donc k = 7/6
Le point est (–19/6 ; 8/6 ; 13/6)

La distance vaut $\sqrt{\left(\frac{-19}{6}+1\right)^2 + \left(\frac{8}{6}-2\right)^2 + \left(\frac{13}{6}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{36}+\frac{16}{36}+\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{185}}{6}$

Détermine la distance de la droite $\begin{cases} x + 2 = -k \\ y + 1 = 2k \\ z - 1 = k \end{cases}$ au plan x + 2y – 3z = 4 **(8)**

La droite et le plan sont parallèle car vecteur directeur de la droite ⊥ vecteur normal du plan.
Soit le point de la droite (–2 ; –1 ; 1). Le problème est identique au premier.

Il faut trouver la droite ⊥ au plan passant par A : $\begin{cases} x = k - 2 \\ y = 2k - 1 \\ z = -3k + 1 \end{cases}$.

Trouver le point de percée de la droite avec le plan : k – 2 + 4k – 2 + 9k + 3 = 4 donc k = 5/13
Le point est (–21/13 ; –3/13 ; –2/13)

La distance vaut $\sqrt{\left(\frac{-21}{13}+2\right)^2 + \left(\frac{-3}{13}+1\right)^2 + \left(\frac{-2}{13}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}+\frac{100}{169}+\frac{225}{169}} = \frac{5\sqrt{14}}{13}$

Détermine la distance entre les plans x – 3y + 4z = 1 et x – 3y + 4z = –5

Les deux plans sont parallèles donc il suffit de prendre un point du premier plan et déterminer la distance de ce point au second plan. Soit A (1 ; 0 ; 0). Il faut faire comme le premier.

Il faut trouver la droite ⊥ au plan passant par A : $\begin{cases} x = k + 1 \\ y = -3k \\ z = 4k \end{cases}$.

Trouver le point de percée de la droite avec le plan : k + 1 + 9k + 16k = –5 donc k = –6/25

Le point est (19/25 ; 18/25 ; –24/25)

La distance vaut $\sqrt{\left(\frac{19}{25} - 1\right)^2 + \left(\frac{18}{25} - 0\right)^2 + \left(\frac{-24}{25} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{625} + \frac{324}{625} + \frac{576}{625}} = \frac{2\sqrt{234}}{25}$

Détermine la distance les droites $\begin{cases} x + 2 = -k \\ y + 1 = 2k \\ z - 1 = k \end{cases}$ et $\begin{cases} x - 4 = k \\ y - 2 = 2k \\ z + 3 = -3k \end{cases}$.

Les deux droites sont orthogonales car vecteurs directeurs orthogonaux.

Il faut donc trouver le plan ⊥ à la seconde droite passant par un point de la première.

x + 2y – 3z + d = 0 (–2 – 2 –3 + d = 0 donc d = 7) le plan est x + 2y – 3z + 7 = 0

Trouvons le point A, le point de percée du plan et de la seconde droite :

k + 4 + 4k + 4 + 9k + 9 + 7 = 0 donc k = 24/14 = 12/7

A (40/7 ; 38/7 ; –57/7).

Il reste alors à trouver la distance de la première droite au point A.

Il faut trouver le plan ⊥ au plan passant par A : –x + 2y + z + d = 0

–40/7 + 76/7 – 57/7 + d = 0 donc d = –3. Donc –x + 2y + z – 3 = 0

Trouver le point de percée de la droite avec le plan : k + 2 + 4k – 2 + k + 1 = 3 donc k = 1/3

Le point est (–7/3 ; –1/3 ; 4/3)

La distance vaut $\sqrt{\left(\frac{40}{7} + \frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{38}{7} + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-57}{7} - \frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{169^2}{441} + \frac{121^2}{441} + \frac{199^2}{441}} = \frac{\sqrt{82803}}{21}$